

### Divisibilidade I

**Teorema 1.** (*Algoritmo da Divisão*) Para quaisquer inteiros positivos  $a$  e  $b$ , existe um único par  $(q, r)$  de inteiros não negativos tais que  $b = aq + r$  e  $r < a$ . Os números  $q$  e  $r$  são chamados de quociente e resto, respectivamente, da divisão de  $b$  por  $a$ .

**Exemplo 2.** Encontre um número natural  $N$  que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.

O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por 10, 9 e 8. Assim, um possível valor para  $N$  é  $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$ .

**Exemplo 3.** a) Verifique que  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

b) Calcule o resto da divisão de  $4^{2012}$  por 3.

Para o item a), usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \dots - a - 1 = a^n - 1.$$

Para o item b), veja que  $3 = 4 - 1$  e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012} - 1 = 3(4^{2011} + \dots + 4 + 1).$$

Isso significa que  $q = (4^{2011} + \dots + 4 + 1)$  e que  $r = 1$ .

**Observação 4.** O teorema anterior admite um enunciado mais geral: Para quaisquer inteiros  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 0$ , existe um único par de inteiros  $(q, r)$  tais que  $b = aq + r$ ,  $0 \leq r < |a|$ . Por exemplo, o resto da divisão de  $-7$  por  $-3$  é 2 e o quociente é 3.

Iremos agora estudar propriedades a respeito das operações com restos.

**Teorema 5.** (*Teorema dos Restos*) Se  $b_1$  e  $b_2$  deixam restos  $r_1$  e  $r_2$  na divisão por  $a$ , respectivamente, então:

$b_1 + b_2$  deixa o mesmo resto que  $r_1 + r_2$  na divisão por  $a$   
 $b_1 b_2$  deixa o mesmo resto que  $r_1 r_2$  na divisão por  $a$ .

*Demonstração.* Por hipótese, existem  $q_1, q_2$  e  $q$  tais que:  $b_1 = aq_1 + r_1$ ,  $b_2 = aq_2 + r_2$  e  $r_1 + r_2 = aq + r$ , logo:

$$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r.$$

Como  $0 < r < |a|$ ,  $b_1 + b_2$  deixa resto  $r$  quando dividido por  $a$ . A demonstração para o produto é deixada ao cargo do leitor.  $\square$

**Observação 6.** Em alguns casos, é preferível que o professor faça uma demonstração do resultado anterior para  $a = 3$  ou  $a = 5$  apenas com o intuito de deixar os alunos mais confortáveis a respeito do resultado. É preferível que mais tempo seja gasto resolvendo exemplos e problemas. Na seção de congruências, os alunos terão um contato mais apropriado com o enunciado anterior.

**Exemplo 7.** Qual o resto que o número  $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$  deixa quando dividido por 7?

Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  por 7.

**Exemplo 8.** Qual o resto que o número  $4^{5000}$  deixa quando dividido por 3?

Como 4 deixa resto 1 por 3,  $4^{5000}$  deixa o mesmo resto que  $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{5000} = 1$  por 3.

**Exemplo 9.** Qual o resto que o número  $2^{2k+1}$  deixa quando dividido por 3?

Note que  $2^0$  deixa resto 1 por 3,  $2^1$  deixa resto 2 por 3,  $2^2$  deixa resto 1 por 3,  $2^3$  deixa resto 2 por 3,  $2^4$  deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como  $2^2$  deixa resto 1, então  $2^{2k} = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^2}_k$  deixa o mesmo resto que  $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_k = 1$  e  $2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2$  deixa o mesmo resto que  $1 \cdot 2 = 2$  por 3.

**Exemplo 10.** Qual o resto de  $n^3 + 2n$  na divisão por 3?

Se o resto de  $n$  por 3 é  $r$ , o resto de  $n^3 + 2n$  é o mesmo de  $r^3 + 2r$ . Para  $r = 0$ , esse resto seria 0. Para  $r = 1$ , seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para  $r = 2$ , o resto seria o mesmo de  $8 + 4 = 12$  que também é 0. Assim, não importa qual o resto de  $n$  por 3, o número  $n^3 + 2n$  sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividi-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n - 1)(n + 1) + 3n.$$

Como  $n - 1, n$  e  $n + 1$  são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

**Observação 11.** *Fatorações podem ser muito úteis para encontrarmos os valores explícitos de  $q$  e  $r$ .*

**Exemplo 12.** *Prove que, para cada  $n$  natural,*

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

*é divisível por  $2^n$ .*

Veja que

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Para cada número natural  $k$  no produto escrito no denominador, temos uma aparição de  $2k$  no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

**Exemplo 13.** *(Olimpíada de Leningrado 1991) Cada um dos naturais  $a, b, c$  e  $d$  é divisível por  $ab - cd$ , que também é um número natural. Prove que  $ab - cd = 1$ .*

Se chamarmos  $p = ab - cd$ , teremos  $a = px, b = py, c = pz$  e  $d = pt$  onde  $x, y, z$  e  $t$  são inteiros. Assim,  $p = p^2(xy - zt)$ . Consequentemente  $1 = p(xy - zt)$  e concluímos que  $p = 1$ , pois  $p$  é natural.

**Exemplo 14.** *A soma digital  $D(n)$  de um inteiro positivo  $n$  é definida recursivamente como segue:*

$$D(n) = \begin{cases} n & \text{se } 1 \leq n \leq 9, \\ D(a_0 + a_1 + \dots + a_m) & \text{se } n > 9, \end{cases}$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_m$  são todos os dígitos da expressão decimal de  $n$  na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo,  $D(989) = D(26) = D(8) = 8$ . Prove que:  $D((1234)n) = D(n)$ , para  $n = 1, 2, 3 \dots$

Como  $10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)$ , podemos concluir que  $10^n$  sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim,  $n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ , deixa o mesmo resto que  $a_m + a_{m-1} + \dots + a_0$  na divisão por 9. Desse modo,  $D(n)$  nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número  $n$ . Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número  $(1234)n$  deixa o mesmo resto que  $1 \cdot n$  por 9, ou seja,  $D((1234)n) = D(n)$ .

**Observação 15.** *O exemplo anterior contém o critério de divisibilidade por 9, i.e.,  $n$  deixa o mesmo resto que  $D(n)$  na divisão por 9. O critério de divisibilidade por 3 é análogo pois  $10^n$  também sempre deixa resto 1 por 3.*

**Exemplo 16.** *Encontre todos os pares de inteiros positivos  $a$  e  $b$  tais que  $79 = ab + 2a + 3b$ .*

Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6 + ab + 2a + 3b \\ &= (3 + a)(2 + b) \end{aligned}$$

Assim,  $(3 + a)$  e  $(2 + b)$  são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são 1, 5, 19, 85. Logo, os possíveis pares de valores para  $(3 + a, 2 + b)$  são  $(5, 19)$  ou  $(19, 5)$  que produzem as soluções  $(a, b) = (2, 17)$  e  $(16, 3)$ .

**Problema 17.** (Olimpíada Russa) Prove que se  $\frac{2^n - 2}{n}$  é um inteiro, então  $\frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$  também é um inteiro.

Se  $k = \frac{2^n - 2}{n}$ , então

$$\begin{aligned} \frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1} &= \frac{2(2^{2^n - 2} - 1)}{2^n - 1} \\ &= 2 \left( \frac{2^{nk} - 1}{2^n - 1} \right) \\ &= 2 \left( \frac{(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1)}{2^n - 1} \right) \\ &= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1), \end{aligned}$$

é um número inteiro.

## Problemas Propostos

**Problema 18.** Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.

**Problema 19.** Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.

**Problema 20.** (OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de  $a^{128} - b^{128}$  por

$$(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

**Problema 21.** (OCM 1994) Seja  $A = 777 \dots 77$  um número onde o dígito "7" aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de  $A$  por 1001.

**Problema 22.** Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13

**Problema 23.** Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.

**Problema 24.** Prove que, para todo inteiro positivo  $n$  o número  $n^5 - 5n^3 + 4n$  é divisível por 120.

**Problema 25.** (Fatorações Importantes)

a) Seja  $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$ . Veja que  $S + z^n = 1 + zS$  então  $S(z-1) = z^n - 1$ . Conclua que, para quaisquer  $x$  e  $y$  vale:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

b) Mostre que se  $n$  é ímpar vale:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

**Problema 26.** Prove que, o número  $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$  é múltiplo de 5.

**Problema 27.** Mostre que o número  $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$  é múltiplo de 10 para todo natural  $n$ .

**Problema 28.** Encontre o resto da divisão  $37^{10} - 1$  por 11.

**Problema 29.** Prove que  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  é divisível por 7.

**Problema 30.** Encontre o último dígito do número  $1989^{1989}$ .

**Problema 31.** Mostre que se  $n$  divide  $a$  então  $2^n - 1$  divide  $2^a - 1$ .

**Problema 32.** (Cone Sul 1996) Provar que o número

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

**Problema 33.** Mostre que para  $n$  ímpar,  $n$  divide  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$

**Problema 34.** Existe um natural  $n$  tal que  $n^n + (n+1)^n$  é divisível por 2011?

**Problema 35.** Quantos números inteiros positivos  $n$  existem tais que  $n+3$  divide  $n^2 + 7$ ?

**Problema 36.** Encontre o número de inteiros  $n$  tais que

1.  $1000 < n < 8000$ .

2.  $n^{n+1} + (n+1)^n$  é divisível por 3.

**Problema 37.** Sejam  $m$  e  $n$  naturais tais que  $mn + 1$  é múltiplo de 24, mostre que  $m + n$  também é múltiplo de 24.

**Problema 38.** (Irlanda 1997) Encontre todos os pares de inteiros  $(x, y)$  tais que  $1 + 1996x + 1998y = xy$ .

### Dicas e Soluções

18. Os números são  $\{0, 8, 16, 24, \dots, 8 \cdot 7\}$ .
18. Escreva  $n = 17q + q^2$  e note que  $0 \leq q^2 < 17$ . Assim,  $q = 0, 1, 2, 3, 4$ .
19. Use a diferença de quadrados sucessivas vezes para obter  $(a - b)$  como quociente.
21. O número do problema é igual a  $\frac{7(10^{1001}-1)}{9}$ . Além disso,  $\frac{10^{999}+1}{10^3+1}$  é inteiro e  $\frac{10^{1001}-1}{10^3+1} = 100 \cdot \frac{10^{999}+1}{10^3+1} - \frac{100}{10^3+1}$ .
22. Os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma  $65k + 59$ .
24. Basta mostrar que  $n^5 - 5n^3 + 4n$  é múltiplo de 3, 8 e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis:  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Assim, o número  $n^5 - 5n^3 + 4n$  possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números:  $\{0^5 - 5 \cdot 0^3 + 40, 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4, 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 8, 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 12, 4^5 - 5 \cdot 4^3 + 16\}$ . Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que  $n^5 - 5n^3 + 4n$  é múltiplo de 5 para todo  $n$  inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.
25. Para o item a), troque  $z$  por  $\frac{x}{y}$ . Para o item b), substitua  $y$  por  $-y$  no item anterior.
26. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos:  $1^{99} + 4^{99} = (1 + 4)(1^{98} + 1^{97} \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 4^{97} + 4^{98})$ . Daí, segue que  $1^{99} + 4^{99}$  é múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que  $2^{99} + 3^{99}$  é múltiplo de 5.
27. O número em questão é múltiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide  $1^n - 6^n$  e  $8^n - 3^n$ . Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 25.
31. Se  $a = nk$ , temos  $(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1) = 2^{nk} - 1$ .
32. Veja que  $1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1 = 1995 \cdot (1997^{1996} - 1) - 1996 \cdot (1997^{1995} - 1)$ . Pela fatoração de  $x^n - y^n$ ,

$$\frac{1996 \cdot (1997^{1995} - 1)}{1996^2} = (1997^{1994} + 1997^{1993} + \dots + 1),$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração,

$$\frac{1995 \cdot (1997^{1996} - 1)}{1996^2} = 1995 \cdot \left( \frac{1997^{1995} - 1}{1996} + \frac{1997^{1994} - 1}{1996} + \dots + \frac{1997 - 1}{1996} + \frac{1996}{1996} \right),$$

é uma soma de números inteiros.

33. Como  $n$  é ímpar,

$$(n - i)^n + i^n = ((n - i) + i)((n - i)^{n-1} - (n - i)^{n-2}i + \dots - (n - i)i^{n-2} + i^{n-1}).$$

34. Faça  $n = 1005$  e use a fatoração de  $x^n + y^n$ .

37. Fatore a expressão como:

$$(x - 1998)(y - 1996) = xy - 1998y - 1996x + 1998 \cdot 1996 = 1997^2.$$

Os divisores de  $1997^2$  são  $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$ . Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos:  $(x, y) = (1999, 1997^2 + 1996), (1997, -1997^2 + 1996), (3995, 3993), (1, -1), (1997^2 + 1998, 1997), (-1997^2 + 1998, 1995)$ .

## Referências

- [1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.
- [2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.
- [3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.
- [4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.
- [5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.
- [6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.