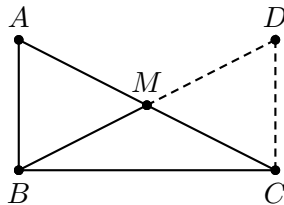


Algumas propriedades importantes de triângulos

Propriedade 1. Num triângulo retângulo ABC , a mediana BM relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa AC .



Demonstração. Seja D o ponto sobre o prolongamento da mediana BM tal que $BM = MD$. Os triângulos AMB e CMD são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $AB = CD$ e $\angle BAM = \angle DCM$, ou seja, AB e CD são segmentos iguais e paralelos e portanto

$$\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ.$$

Assim, os triângulos ABC e DCB são congruentes, pelo caso LAL, e portanto

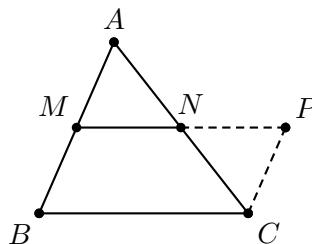
$$BD = AC \implies 2 \cdot BM = AC \implies BM = \frac{AC}{2}.$$

Afirmção. Uma base média de um triângulo é um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados.

Assim, todo triângulo possui exatamente três bases médias.

Propriedade 2. Sejam ABC um triângulo e M, N os pontos médios dos lados AB, AC , respectivamente. Então

$$MN \parallel BC \quad \text{e} \quad MN = \frac{BC}{2}.$$



Demonstração. Inicialmente, prolonguemos a base média MN até um ponto P tal que $MN = NP$. Em seguida, construímos o triângulo CNP . Note que os triângulos ANM e CNP são congruentes, pelo caso LAL. Daí, $CP = AM$ e $\angle MAN = \angle PCN$ e portanto

$$CP \parallel AM \implies CP \parallel BM.$$

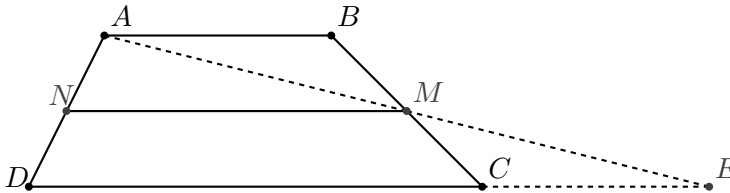
Assim, $MBCP$ é um paralelogramo, pois CP e BM são segmentos paralelos e iguais. Mas então $MP \parallel BC$ e

$$MP = BC \implies 2MN = BC \implies MN = \frac{BC}{2}.$$

Afirmção. A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios de seus lados não paralelos.

Propriedade 3. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD , e sejam M e N os pontos médios dos lados BC e AD , respectivamente. Então,

$$MN \parallel AB, MN \parallel CD \text{ e } MN = \frac{AB + CD}{2}.$$



Demonstração. Inicialmente, prolonguemos AM até encontrar DC no ponto E . É fácil ver que

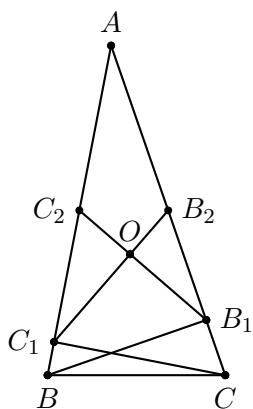
$$\triangle ABM \cong \triangle CME \text{ (ALA)} \implies AB = CE.$$

Portanto, MN é base média do triângulo ADE . Assim,

$$MN \parallel BE \implies MN \parallel DC \implies MN = \frac{DE}{2}.$$

Finalmente, $MN = \frac{DC + CE}{2} = \frac{DC + AB}{2}.$

Problema 1. (OBM) Considere um triângulo acutângulo ABC com $\angle BAC = 30^\circ$. Sejam B_1, C_1 os pés das alturas relativas aos lados AC, AB , respectivamente, e B_2, C_2 os pontos médios dos lados AC, AB , respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.



Solução.

Seja O a interseção entre B_1C_2 e B_2C_1 . O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo retângulo AB_1B e portanto

$$AC_2 = B_1C_2 \quad \text{e} \quad \angle C_2B_1A = \angle BAB_1 = 30^\circ.$$

Analogamente, $AC_1B_2 = 30^\circ$. Daí,

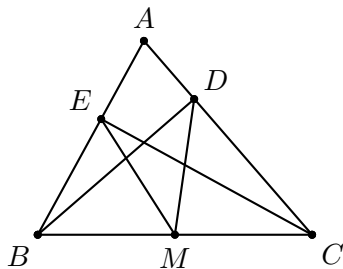
$$\angle BC_2B_1 = \angle C_2B_1A + \angle BAB_1 = 60^\circ$$

e portanto

$$\angle C_1OC_2 = 180^\circ - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90^\circ.$$

Problema 2. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC . Se D, E são os pés das alturas relativas aos lados AC, AB , respectivamente, prove que $ME = MD$.

Solução.



Note que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo BEC . Daí,

$$ME = BM = CM$$

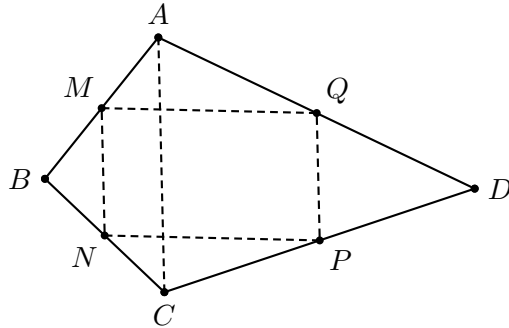
e, analogamente,

$$MD = BM = CM.$$

Assim, $ME = MD$.

Problema 3. Dado um quadrilátero $ABCD$, prove que os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA formam um paralelogramo.

Solução.



Temos

- Triângulo ABC : $MN \parallel AC$ e $MN = AC/2$.
- Triângulo DAC : $PQ \parallel AC$ e $PQ = AC/2$.

Assim, $MN \parallel PQ$ e $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ é paralelogramo.

Problema 4. Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio de BC . Se $AM = BM = CM$, prove que $\angle BAC = 90^\circ$.

Problema 5. (Torneio das Cidades) Sejam $ABCD$ um paralelogramo, M o ponto médio de CD e H o pé da perpendicular baixada de B a AM . Prove que BCH é um triângulo isósceles.

Problema 6. Em um triângulo ABC , retângulo em A e isósceles, sejam D um ponto no lado AC ($A \neq D \neq C$) e E o ponto no prolongamento de BA tal que o triângulo ADE é isósceles. Se P é o ponto médio de BD , R o ponto médio de CE e Q a interseção entre ED e BC , prove que o quadrilátero $ARQP$ é um quadrado.

Problema 7. Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $\angle B = 2\angle C$, AD é perpendicular a BC , com D sobre BC , e E o ponto médio de BC . Prove que $AB = 2DE$.

Problema 8. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AD \parallel BC$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, E, M, F, N os pontos médios de AB, BC, CD, DA respectivamente. Se $BC = 7$, $MN = 3$, determine a medida de EF .

Problema 9. (China) Seja $ABCD$ um trapézio, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$, e o triângulo ABC é equilátero. Se a base média do trapézio $EF = \frac{3}{4}a$, determine o comprimento da menor base AB , em função de a .

Problema 10. (Moscou) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e O um ponto em seu interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$, $AO = OB$, $CO = OD$. Sejam K , L , M os pontos médios de AB , BC , CD respectivamente, prove que $\triangle KLM$ é equilátero.

Problema 11. (OBM) Num quadrilátero convexo, a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

Problema 12. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, prove que esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Problema 13. (OBM) No triângulo ABC , D é ponto médio de AB e E ponto sobre o lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

Problema 14. (Austrália) Sejam ABC um triângulo e P um ponto em seu interior de modo que $\angle PAC = \angle PBC$. Se L , M são os pés das perpendiculares por P aos lados BC , AC , respectivamente, e D é o ponto médio de AB , prove que $DL = DM$.

Problema 15. (Romênia) Sejam ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$, D o ponto médio de BC , M o ponto médio de AD e N a projeção de D sobre BM . Prove que $\angle ANC = 90^\circ$.

Problema 16. (Eslovênia) Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD . Sabendo que a distância entre os pontos médios das bases é igual à distância entre os pontos médios das diagonais, prove que $\angle DAC$ e $\angle DBC$ são ângulos obtusos.

Problema 17. Em um triângulo isósceles ABC , com $AB = BC$, sejam K , L pontos sobre AB , BC , respectivamente, tais que $AK + LC = KL$. A reta paralela a BC passando pelo ponto médio M de KL intersecta AC em N . Ache a medida de $\angle KNL$.

Problema 18. Sejam ABC um triângulo e D , E , F os pontos médios de BC , CA , AB , respectivamente. Prove que

$$\angle DAC = \angle ABE \iff \angle AFC = \angle ADB.$$

Problema 19. Seja $ABCD$ um trapézio com bases $AB = a$ e $CD = b$. Sejam também M, N os pontos médios dos lados AB, CD , respectivamente. Sabendo que $\angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$, determine o comprimento de MN .

Problema 20. (Cone Sul) Seja ABC um triângulo acutângulo e sejam AN, BM e CP as alturas relativas aos lados BC, CA e AB , respectivamente. Sejam R, S as projeções de N sobre os lados AB, CA , respectivamente, e Q, W as projeções de N sobre as alturas BM, CP , respectivamente.

(a) Mostre que R, Q, W, S são colineares.

(b) Mostre que $MP = RS - QW$.

Problema 21. (TST Brasil) Sejam Q o ponto médio do lado AB de um quadrilátero inscritível $ABCD$ e S a interseção das diagonais AC e BD . Sejam P, R as projeções ortogonais de S sobre AD, BC , respectivamente. Prove que $PQ = QR$.

Bibliografia

Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses
For Junior Section, vol. 1
Xu Jiagu